Produits Infinis

Produits infinis

Proposition : Le produit $\prod_{n\geq 1} a_n$ converge ssi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ / \ n > N \ \ k > 0 \Rightarrow$

$$|a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+k} - 1| < \varepsilon$$

(C'est l'équivalent du critère de Cauchy pour les séries)

Corollaire : Si le produit $\prod a_n$ converge, alors $a_n \to 1$

Proposition : Soient $u_n \geq 0 \ \forall n$. Le produit $\prod_{n\geq 1} (1+u_n)$ converge ssi $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
(prop. analogue si $u_n \leq 0 \ \forall n$)

On dit que le produit $\prod(1+u_n)$ est absolument convergent si $\prod(1+|u_n|)$ converge, c.à.d si $\sum |u_n|$ converge. Avec cette définition :

Proposition : Si le produit $\prod(1+u_n)$ est absolument convergent, alors :
1) $\prod(1+u_n)$ converge simplement
2) Il est commutativement convergent
3) La valeur de ce produit est indépendante de l'ordre des facteurs.

Théorème : Soient $u_1(z), \dots, u_n(z), \dots$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert G de $\mathbb{C}$. Si la série $\sum |u_n(z)|$ converge uniformément dans G ~~vers une fonction F(z)~~, et si sa somme $\sum_{n\geq 1} |u_n(z)|$ est bornée dans G, alors le produit $\prod_{n\geq 1} (1+u_n(z))$ converge absolument et uniformément vers une fonction $F(z)$ holomorphe dans G.
De plus, $F(z) = 0 \Leftrightarrow \exists n \ / \ 1+u_n(z) = 0$.

Proposition : Si $\infty \notin G$ et dans les hypothèses du Théorème ci-dessus,

$$\forall z \in G \ / \ F(z) \neq 0 \qquad \frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n\geq 1} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)}$$

La série de droite étant presque uniformément convergente lorsque l'on a retiré les termes possédant un point singulier dans G (ces termes étant en nombre fini)

(Ref RMS 81/82 n°2)

Proposition : Lorsque $u_n \to 0$ $(n \to +\infty)$, le produit infini $\prod_{n\geq 1} (1+u_n)$ est de même nature que $\sum_{n\geq 1} \ln(1+u_n)$ ~~(si $\alpha_n = (1+u_n)$)~~) ($\ln$ = branche principale du logarithme complexe)

Proposition : La série $\sum \ln(1+u_n)$ est absolument convergente ssi la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
Par suite, si $\sum |u_n|$ converge, $\prod(1+u_n)$ converge aussi.

Théorème de Weierstrass sur la décomposition des fonctions entières en produit

<u>Théorème</u> : Si $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ est une suite quelconque de nombres non nuls et tendant vers l'infini, et k un entier positif, il existe une fonction entière $F(z)$ possédant des zéros aux points $z_1, \dots, z_n, \dots$ et un zéro d'ordre k au point 0, et non nulle partout ailleurs. Si $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ est une suite arbitraire d'entiers positifs tels que la série $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{\lambda_n + 1}$ converge presque uniformément dans le plan ouvert tout entier, on peut prendre le produit absolument convergent suivant pour F :

$$F(z) = z^k \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\left(\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n}\right)}$$

<u>Corollaire</u> : Soit $F(z)$ une fonction entière possédant un zéro d'ordre k au point 0 et dont la suite de ses zéros non nuls est $z_1, \dots, z_n, \dots$. Alors :

$$F(z) = e^{h(z)} z^k \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n}}$$

où $h(z)$ est une fonction entière et où la suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ d'entiers positifs vérifie l'hypothèse du Théorème ci-dessus. Le produit converge absolument et presque uniformément dans le plan ouvert $\mathbb{C}$. En particulier, la valeur du produit est indépendante de l'ordre des facteurs.

1) Conditions de Cauchy

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ peut être considérée comme une fct de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$.

Soit $f(x,y) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$ avec $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

f holomorphe $\iff \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z) \in \mathbb{C}$

$\iff |f(z+h) - f(z) - f'(z)h| = o(|h|)$ $\qquad h = h_1 + i h_2$, $f'(z) = a + ib$

$\iff |P(x+h_1, y+h_2) - P(x,y) + i(Q(x+h_1,y+h_2) - Q(x,y)) - (a+ib)(h_1+ih_2)| = o(|h|)$

$$\iff \begin{cases} |P(x+h_1,y+h_2) - P(x,y) - a h_1 + b h_2| = o(|h|) \\ \text{et} \\ |Q(x+h_1,y+h_2) - Q(x,y) - b h_1 - a h_2| = o(|h|) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} P \text{ et } Q \text{ différentiables sur } \mathbb{R}^2 \text{ et :} \\ \dfrac{\partial P}{\partial x} = a \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = b \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -b \quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = a \end{cases}$$

f holomorphe $\iff$ P et Q sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et vérifient les conditions de Cauchy : $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

2) Introduire les symboles $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ (1)

Mq f est holomorphe ssi $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (2)

On pose, par analogie, pour toute application $\mathbb{R}$-différentiable de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \qquad \text{où } \begin{cases} dz = d(x+iy) = dx + i\,dy \\ d\bar{z} = d(x-iy) = dx - i\,dy \end{cases}$$

(égalités entre $\mathbb{R}$-appl. linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$)

Soit $\begin{cases} dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \end{cases}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{i}(dz - d\bar{z})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\bar{z}\right)$$

d'où $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases}$ et (1).

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{où } f = P + iQ$$

$$\iff \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = 0$$

$$\iff \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \text{(cond. de Cauchy)} \underset{1)}{\iff} f \text{ holomorphe.}$$, d'où (2)

NB : Si f est holomorphe, on aura $f(z) = \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Explicitons alors $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} - i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)}_{=2\frac{\partial P}{\partial x}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{2\frac{\partial Q}{\partial x}} i$$

d'où $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = a + ib$ avec les notations du 1)

(ie en posant $a + ib = f'(z)$ = nbre dérivé) – Ccl : $\boxed{\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z) \text{ et } f(z) = f'(z)\,dz}$

a) Soit $z \mapsto f(z) = P + iQ$ une fonction holomorphe. Déterminer $f(z)$ sachant que $P = \dfrac{x(1+x)+y^2}{(1+x)^2+y^2}$.

b) Etudier la dérivabilité de f définie pour $z \in \mathbb{C}$ par : $f(z) = z|z|$ directement, puis en utilisant les conditions de Cauchy.

---

a) $f(z) = P + iQ$ est holomorphe ssi $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$ (Conditions de Cauchy) (et, bien sûr, P et Q sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$)

Cela nous permet de remonter à Q :

$$P = \frac{x^2+x+y^2}{x^2+2x+1+y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y(x+1)}{(x^2+2x+1+y^2)^2} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{y}{x^2+2x+1+y^2} + \underbrace{\xi(x)}_{\text{fonction différentiable de } x.} \qquad (*)$$

Réc., si Q est défini par $(*)$, on aura :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} & \text{(on le vérifie, en notant que } \dfrac{\partial}{\partial y}\xi(x) = 0\text{)} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} & \text{(par construction)} \end{cases}$$

__Ccl__ : Les fonctions $f(z)$ répondant à la question sont :

$$f(z) = \frac{x(1+x)+y^2}{(1+x)^2+y^2} + i\left(\frac{y}{(1+x)^2+y^2} + \xi(x)\right)$$

où $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable.

(réf. Deug A_1 - 2ᵉ année, 90-91)

b) $f(z) = (x+iy)\sqrt{x^2+y^2} = P + iQ$ où $\begin{cases} P = x\sqrt{x^2+y^2} \\ Q = y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

P et Q sont différentiables sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \sqrt{x^2+y^2} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Les cond. de Cauchy sont $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+y^2 = x^2+2y^2 \\ xy = -yx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

<u>ccl</u> : f n'est pas holomorphe sur U, pour tout ouvert U de $\mathbb{C}^*$.

<u>Preuve directe</u> : Dire que f est holomorphe en $z_0 \in \mathbb{C}^*$ signifie que :

$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad |z - z_0| < \eta \Rightarrow \big|\, z|z| - z_0|z_0| - \ell(z-z_0) \,\big| < \varepsilon |z-z_0|$ (1)

pour un $\ell \in \mathbb{C}$ convenable.

Pour $z = z_0 t$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $|z_0 t - z_0| < \eta$, (1) devient :

$\big| z_0 t |z_0| t - z_0|z_0| - \ell z_0(t-1) \big| < \varepsilon |z_0| |t-1|$

$\big| |z_0|(t+1) - \ell \big| < \varepsilon$

On peut faire tendre t vers 1 : $\big| 2|z_0| - \ell \big| < \varepsilon$,

et ceci devrait être vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Donc nécessairement $\boxed{\ell = 2|z_0|}$

Réinjecter dans (1) et obtenir une contradiction. Ce n'est pas beau

Fonction $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$

Ref. [Ser] p 115

Proposition : La fonction ζ est holomorphe et $\neq 0$ dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$ et l'on a : $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \varphi(s)$ où $\varphi(s)$ est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Corollaire : La fonction zêta a un pôle simple pour $s = 1$. On a, de plus :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \sim \ln \frac{1}{s-1} \qquad (s \to 1)$$

alors que $\sum_{p, k \geq 2} \frac{1}{p^{ks}}$ reste borné.

Résultats : $\zeta(s)$ se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe, avec un seul pôle $s = 1$. $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ vérifie l'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$.

$\zeta(s)$ prend des valeurs rationnelles sur les entiers négatifs :

$$\begin{cases} \zeta(-2n) = 0 & (n > 0) \\ \zeta(1-2n) = (-1)^n \frac{B_n}{2n} & (B_n = n^{-} \text{nombre de Bernouilli}) \end{cases}$$

On conjecture (hypothèse de Riemann) que les autres zéros de ζ se trouvent sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ (non encore prouvé, mais vérifié pour 3 millions de zéros !)